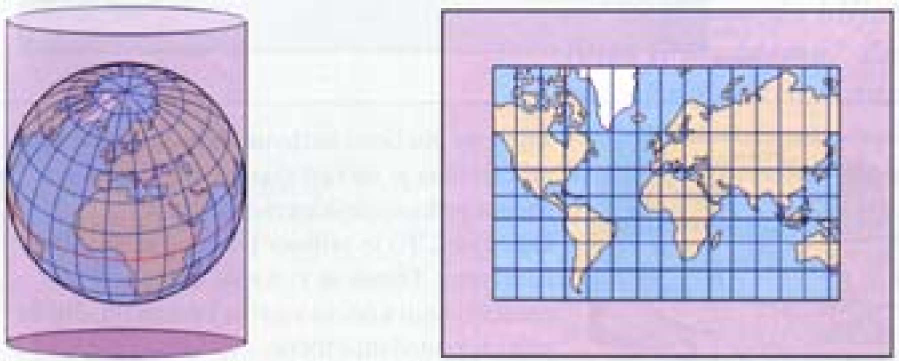
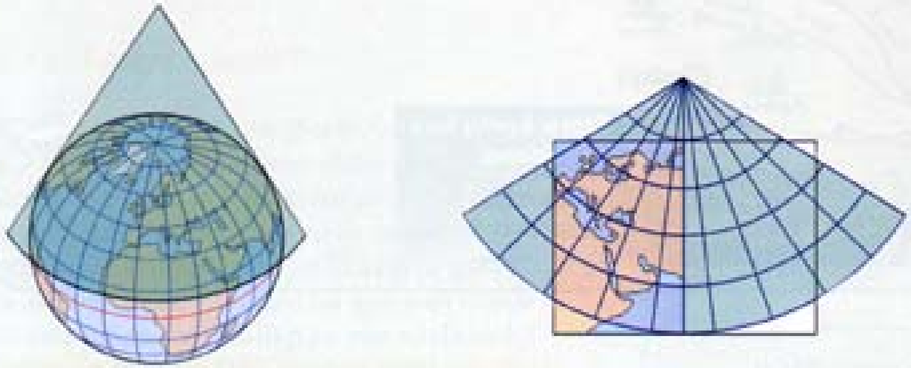
Kartografske projekcije u nastavi geografije

Miljenko Lapaine
Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Hrvatsko kartografsko društvo



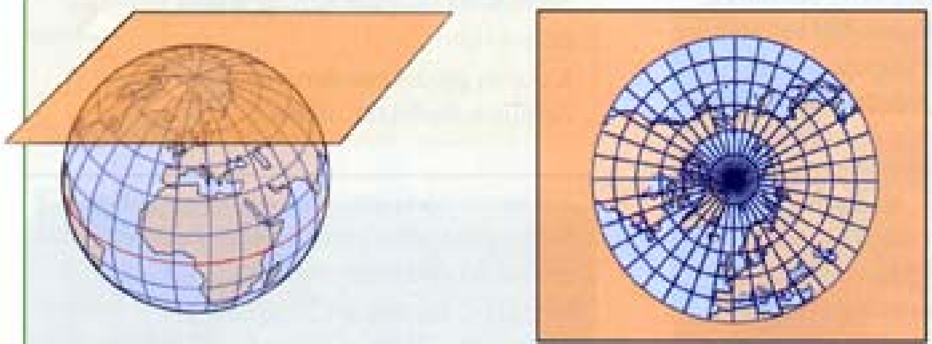
Valjkasta projekcija

Valjak dodiruje globus na ekvatoru. Tamo su površine najvjernije, a na polovima su najizobličenije.



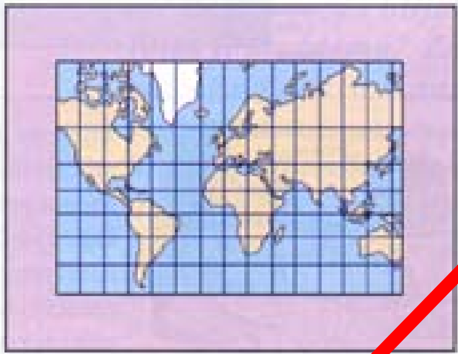
Stožasta projekcija

Stožac dodiruje globus na jednoj paraleli. Tu su površine najtočnije prikazane. Dijelovi stošca koji su više odvojeni od globusa, više su i izobličeni.



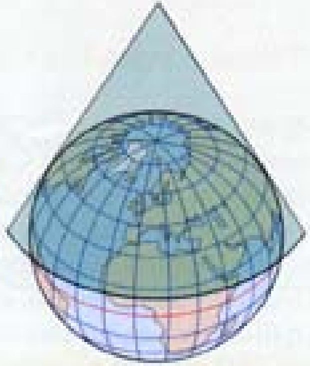
Horizontalna projekcija

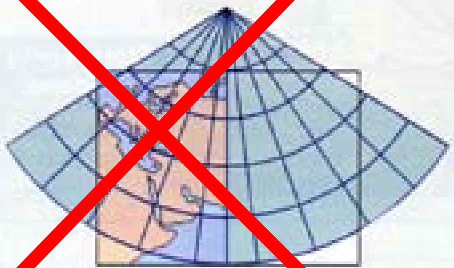
Ravna ploha dodiruje globus u jednoj točki. Što su površine udaljenije od te središnje točke, to su izobličenije.



Valjkasta projekcija

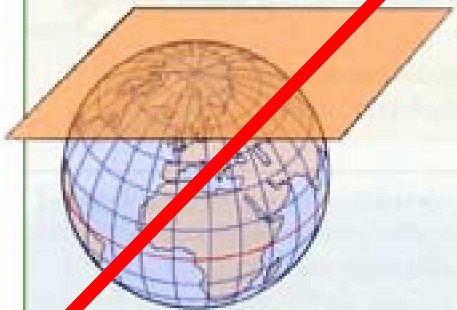
Valjak dodiruje globus na ekvatoru. Tamo su površine najvjernije, a na polovima su najizobličenije.

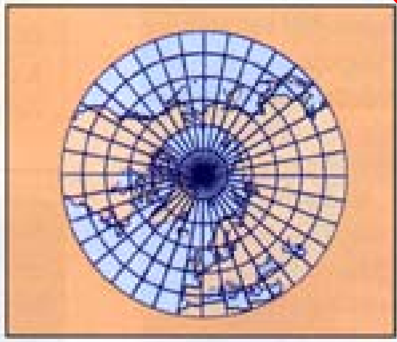




Stožasta projekcija

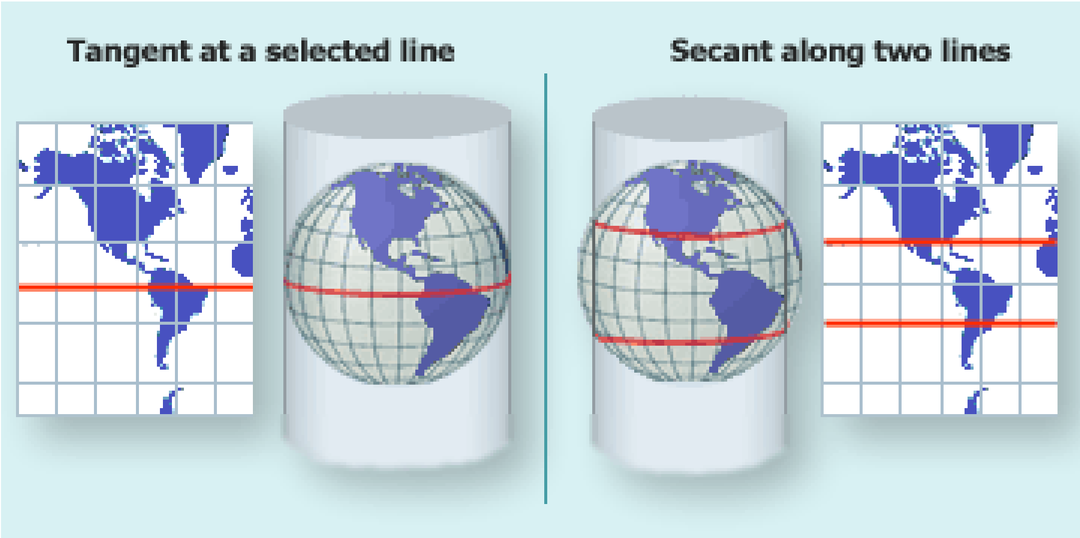
Stožac dodiruje globus na jednoj paraleli. Tu su površine najtočnije prikazane. Dijelovi stošca koji su više odvojeni od globusa, više su i izobličeni.

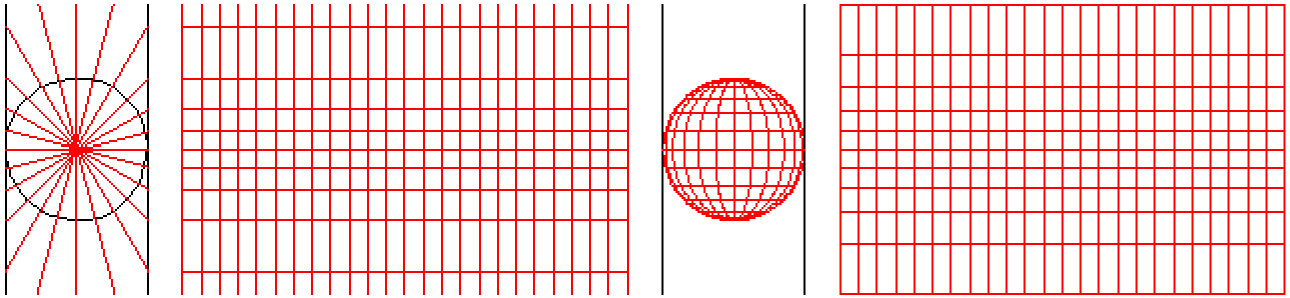




Horizontalna projekcija

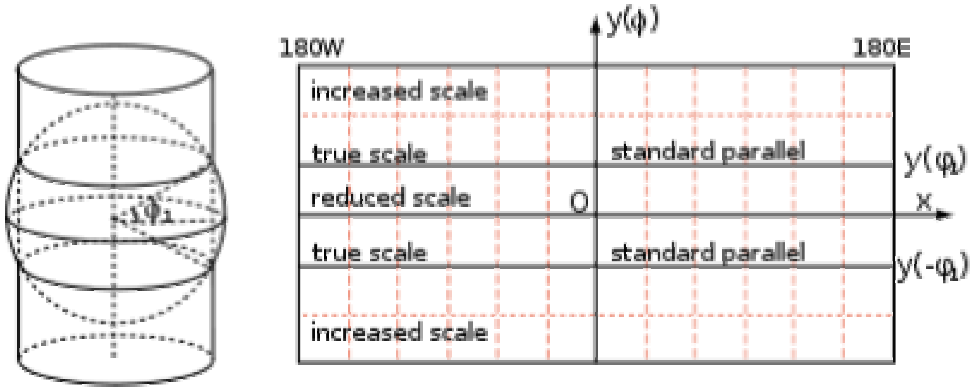
Ravna ploha dodiruje globus u jednoj točki. Što su površine udaljenije od te središnje točke, to su izobličenije.


Tangent at a selected line
Secant along two lines



http://www.math.ubc.ca/~israel/m103/mercator/mercator.html

How NOT to do it



Wikipedia – Mercator Projection

Cilindrične projekcije s dvije standardne paralele

Projekcije na sjekući valjak – Secant projections

U mnogim udžbenicima – *conceptual projection*

Glossary of the **Album of Map Projections** by Snyder and Voxland (1999):

Conceptually projected Convenient way to visualize a projection system, although it may not correspond to the actual mathematical projection method.

Cylindrical projection Projection resulting from the conceptual projection of the Earth onto a tangent or secant cylinder, which is then cut lengthwise and laid flat. When the axis of the cylinder coincides with the axis of the Earth, the meridians are straight, parallel, and equidistant, while the parallels of latitude are straight, parallel, and perpendicular to the meridians. Mathematically, the projection is often only partially geometric.

Secant cone, cylinder, or plane A secant cone or cylinder intersects the sphere or ellipsoid along two separate lines; these lines are parallels of latitude if the axes of the geometric figures coincide. A secant plane intersects the sphere or ellipsoid along a line that is a parallel of latitude if the plane is at right angles to the axis.

Moja pitanja:

1. Trebamo li zaista vizualizirati projekciju tako da *ne mora odgovarati stvarnoj matematičkoj metodi projiciranja*?

2. Zašto definicija cilindrične (ili konusne ili azimutne) projekcije treba biti s pomoću pojma konceptualne projekcije, tj. projiciranja globusa na tangencijalnu ili sekantnu cilindričnu plohu, koju se onda razreže uzduž izvodnice i izravna u ravninu, iako smo svjesni da *to općenito nije točno*?

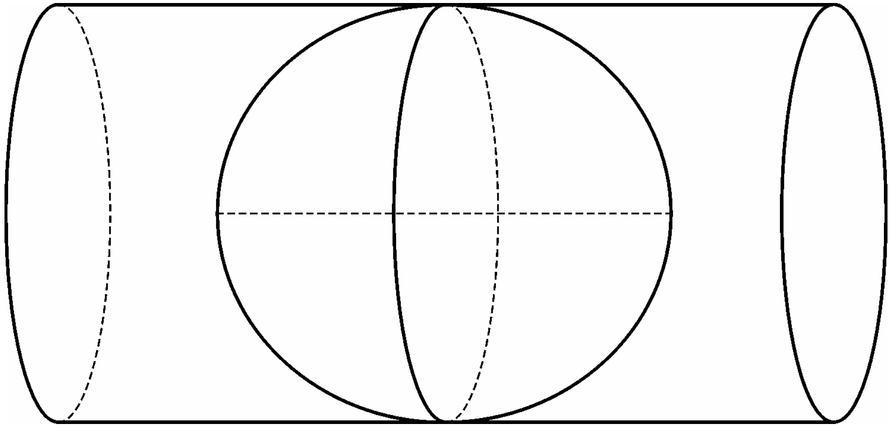
3. Zašto se pomoćne plohe (konus, cilindar ili ravnina) upotrebljavaju pri kartografskim projekcijama?

Snyder i Voxland (1989) između ostalog pišu o poprečnoj Mercatorovoj projekciji (Transverse Mercator):
"Conceptually projected onto a cylinder wrapped around the globe tangent to the central meridian or secant along two small circles equidistant from the central meridian."

Što bi to bilo "two small circles equidistant from the central meridian"?

Snyder i Voxland(1989) pišu o svojstvima pravokutne projekcije (Equirectangular projection):
"Conceptually projected onto a cylinder secant to the globe along the chosen standard parallels."

Posljednja *tvrdnja je pogrešna*, što ću u nastavku dokazati. Štoviše, standarne paralele i sekantne plohe nemaju ništa zajedničko, osim možda kod perspektivnih projekcija.



Moje je mišljenje:

1. U području kartografskih projekcija *ne trebamo ništa* što ne odgovara stvarnim matematičkim metodama projiciranja.

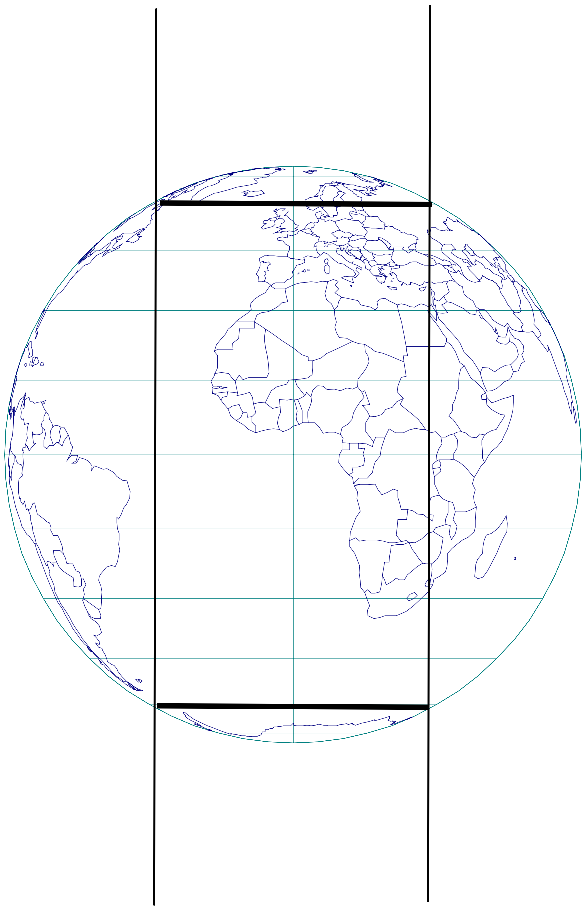
2. *Ne trebamo definicije* koje su konceptualne prirode i koje ne odgovaraju stvarnosti ili koje su pogrešne.

3. Općenito govoreći, sekantni (sjekući) konus ili cilindar *ne treba upotrebljavati* u kartografskim projekcijama jer obično daju pogrešan utisak o onome što se stvarno zbiva.

Dokažimo!

2. Je li uspravna Mercatorova projekcija s dvije standardne paralele projekcija na sjekući cilindar? Nije.

Uspravna Mercatorova projekcija s dvije standardne paralele smotana u cilindar ne siječe sferu uzduž tih paralela.



Dokaz:

Opće jednadžbe uspravne cilindrične projekcije

$$y = k\lambda$$
$$x = x(\varphi).$$

Linearno mjerilo uzduž meridijana, odnosno paralela

$m = \dfrac{dx}{Rd\varphi}$ i $n = \dfrac{k}{R\cos\varphi}$, gdje je *R* polumjer sfere.

Pretpostavimo da je paralela kojoj odgovara geografska širina φ_1 standardna paralela za neki $\varphi = \varphi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$. Budući da je kosinus parna funkcija, $\cos\varphi_1 = \cos(-\varphi_1)$, što znači da je paralela kojoj odgova $-\varphi_1$ također standardna paralela.

Iz uvjeta $n(\varphi_1) = \dfrac{k}{R\cos\varphi_1} = 1$ slijedi $k = R\cos\varphi_1$

pa je jedna od jednadžbi te projekcije

$y = R\cos\varphi_1\lambda$.

Projekcija je konformna što znači da su linearna mjerila uzduž meridijana iparalela međusobno jednaka:

$$m = \frac{dx}{Rd\varphi} = n = \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}.$$

Dakle

$$\frac{dx}{d\varphi} = R\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}, \quad dx = R\cos\varphi_1 \frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \quad x = R\cos\varphi_1 \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + K.$$

Prirodni uvjet $x = 0$ za $\varphi = 0$, daje $K = 0$,
konačne jednadžbe uspravne konformne cilindrične (Mercatorove) projekcije s dvije standardne paralele φ_1 i $-\varphi_1$ su:

$$y = R\cos\varphi_1\lambda$$

$$x = R\cos\varphi_1 \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Ako se pravokutnik sa stranicama $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in [-R\cos\varphi_1\pi, R\cos\varphi_1\pi]$ koje odgovaraju $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$ zamota u kružni cilindar tako da se zalijepe izvodnice $\lambda = -\pi$ i $\lambda = \pi$, što će rezultirati s cilindričnom plohom polumjera $R\cos\varphi_1$.

Paralela koja odgovara širini φ_1 imat će visinu na cilindričnoj plohi iznad ekvatorijalne ravnine $x = R\cos\varphi_1 \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)$.

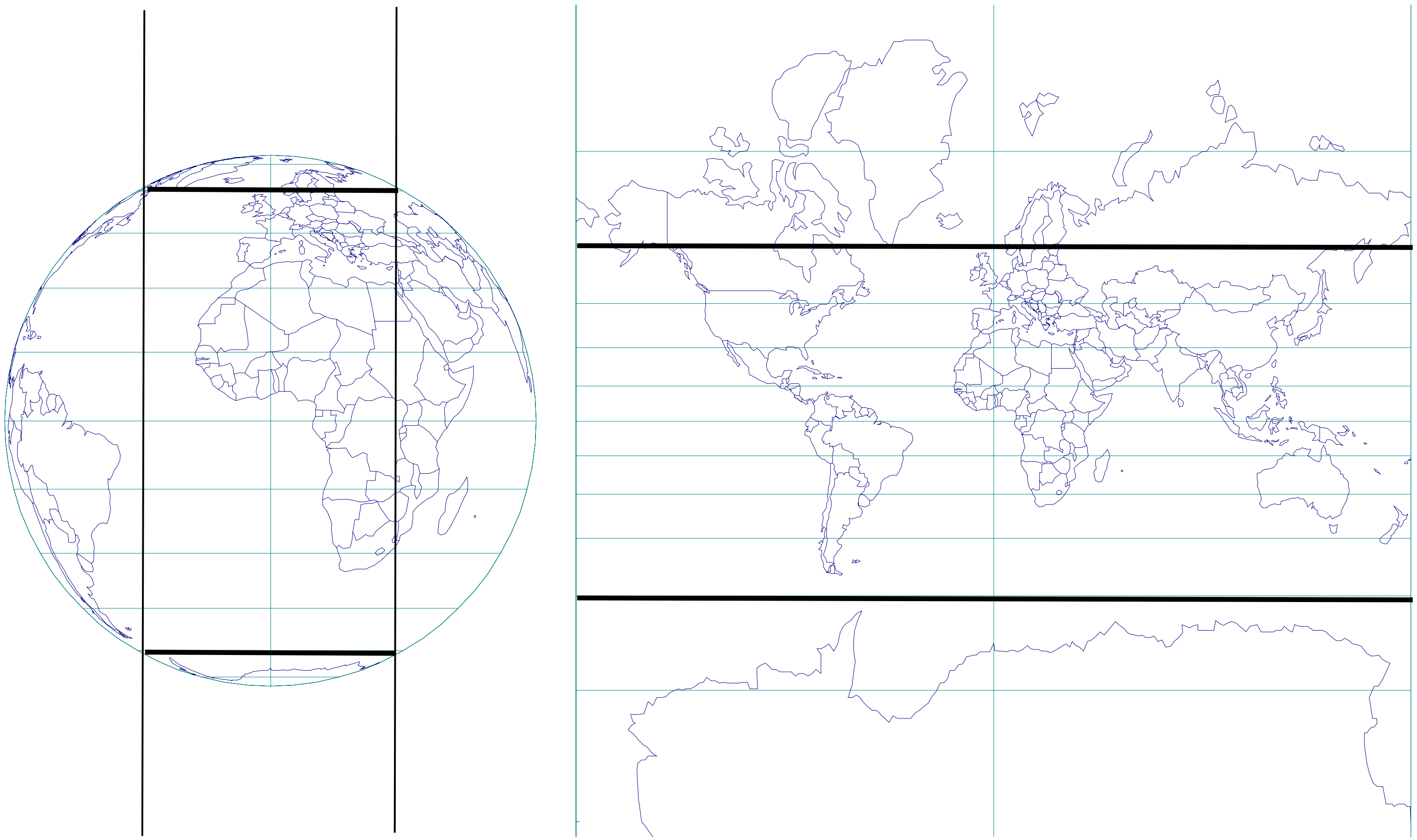
Paralela s istom širinom φ_1 imat će visinu iznad ekvatorijalne ravnine na sferi $R\sin\varphi_1$. Može se pokazati da jednadžba

$$R\sin\varphi_1 = R\cos\varphi_1 \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)$$

ima samo jedno rješenje $\varphi_1 = 0$.

Primjer

Neka je zadana standardne paralela s $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$. Na sferi ta je paralela $R\sin\varphi_1 = R\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0,866R$ iznad ekvatorske ravnine, dok je u uspravnoj Mercatorovoj projekciji $R\cos\dfrac{\pi}{3}\ln\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right) = 0,658R$ iznad slike ekvatora.



Lijeva i desna strana u istom su mjerilu. Deblje izvučene crte pokazuju paralele koje su na različitim visinama u odnosu na ekvator.

Zaključak:

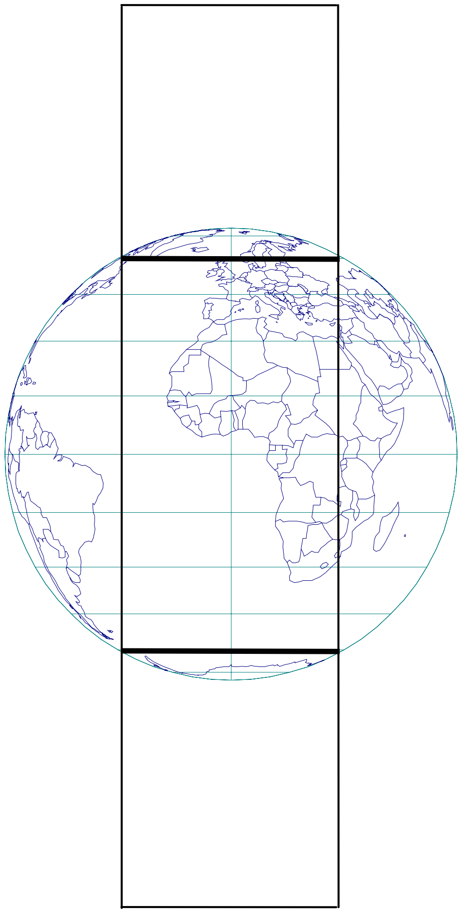
Dokazano je da se standardna paralela u Mercatorovoj projekciji ne može objasniti ili interpretirati kao paralela u kojoj sfera siječe cilindar.

Objašnjavanje uspravne Mercatorove projekcije kao projekcije na cilindričnu plohu koja siječe sferu (sekantna projekcija) nema smisla jer takva projekcija ne postoji.

Je li potrebno opisivati Mercatorovu projekciju kao projekciju na cilindričnu plohu nakon čega slijedi razvijanje te plohe u ravninu projekcije?

To se ne može ni vidjeti ni zaključiti iz izvoda Mercatorove projekcije.

Je li uspravna ekvivalentna cilindrična projekcija s dvije standardne paralele sekantna projekcija? Ne, nije.



Dokaz.

Opće jednadžbe uspravnih cilindričnih projekcija su:

$$y = k\lambda$$
$$x = x(\varphi).$$

Linearna mjerila uzduž meridijana i paralela su:

$m = \dfrac{dx}{Rd\varphi}$ i $n = \dfrac{k}{R\cos\varphi}$, gdje je *R* polumjer sfere.

Pretpostavimo da je paralela kojoj odgovara širina φ_1 standardna paralela za neki $\varphi = \varphi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Kosinus je parna funkcija pa je $\cos\varphi_1 = \cos(-\varphi_1)$, što znači da je paralela sa širinom $-\varphi_1$ također standardna paralela.

Iz uvjeta $n(\varphi_1) = \dfrac{k}{R\cos\varphi_1} = 1$ imamo $k = R\cos\varphi_1$,

i jedna od jednadžbi projekcije je

$$y = R\cos\varphi_1\lambda.$$

Ako je projekcija ekvivalentna, tada iz uvjeta $mn = 1$ slijedi

$$\frac{dx}{Rd\varphi} \frac{R\cos\varphi_1}{R\cos\varphi} = 1$$

i

$$dx = \frac{R}{\cos\varphi_1}\cos\varphi d\varphi, \quad x = \frac{R}{\cos\varphi_1}\sin\varphi + K.$$

Prirodni uvjet $x = 0$ za $\varphi = 0$ daje $K = 0$.

Konačne jednadžbe uspravne ekvivalentne cilindrične projekcije s dvije standardne paralele φ_1 i $-\varphi_1$ su:

$$y = R\cos\varphi_1\lambda$$
$$x = \frac{R}{\cos\varphi_1}\sin\varphi.$$

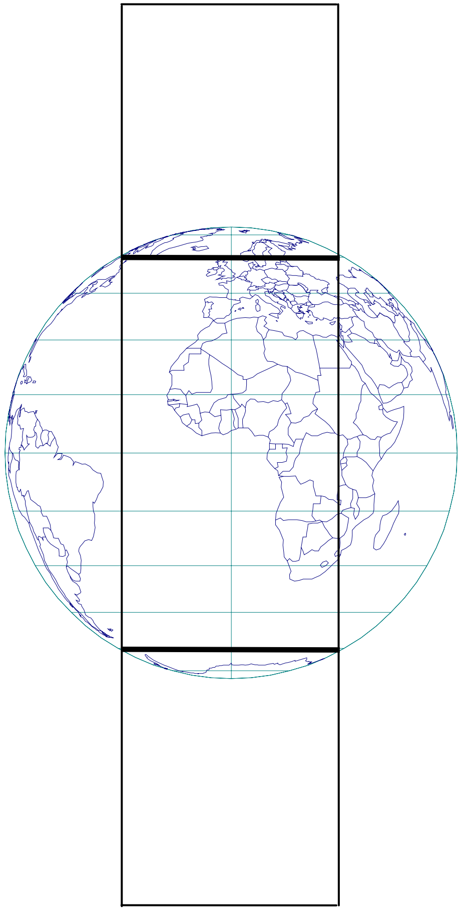
Dakle,

$$x(\varphi_1) = \frac{R}{\cos\varphi_1}\sin\varphi_1,$$

što je jednako $R\sin\varphi_1$ ako i samo ako je $\varphi_1 = 0$.

Primjer.

Neka je standardna paralela zadana s $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$. Na sferi ta je paralela na visini $R\sin\varphi_1 = R\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0,866R$ iznad ekvatorske ravnine, dok je u uspravnoj ekvivalentnoj projekciji $R\sqrt{3} = 1,73R$ iznad slike ekvatora.



Lijeva i desna slika u istom su mjerilu. Deblje izvučene paralele na različitim su visinama iznad ekvatora.

Zaključak:

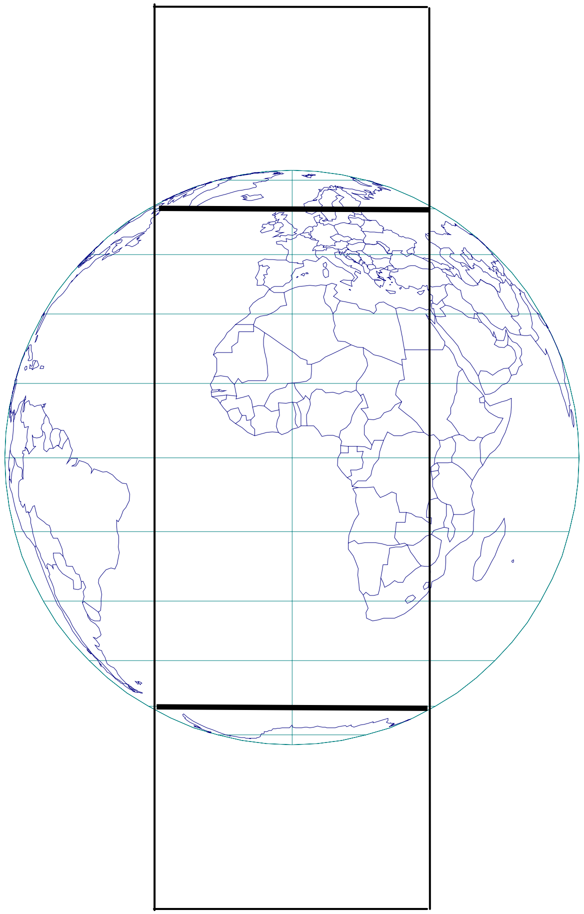
Dokazano je da se standardna paralela u uspravnoj ekvivalentnoj cilindričnoj projekciji ne može objasniti ili interpretirati kao paralela u kojoj sfera siječe cilindar.

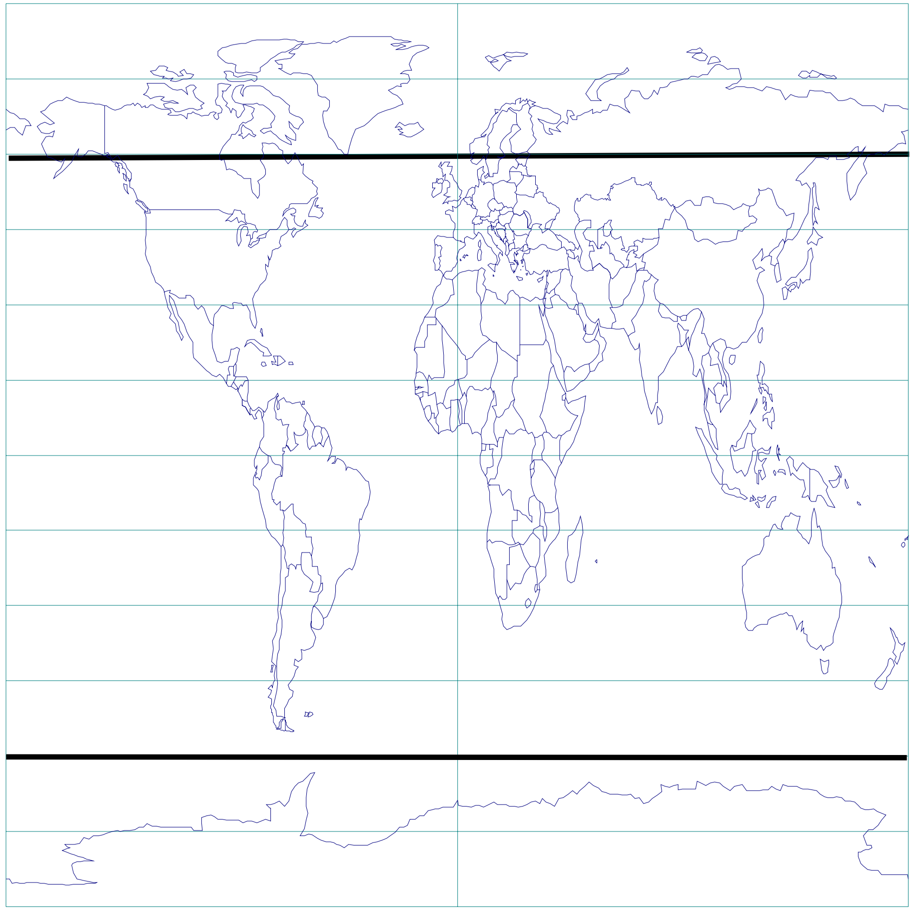
Objašnjavanje uspravne ekvivalentne cilindrične projekcije kao projekcije na cilindričnu plohu koja siječe sferu (sekantna projekcija) nema smisla jer takva projekcija ne postoji.

Je li potrebno opisivati uspravnu ekvivalentnu cilindričnu projekciju kao projekciju na cilindričnu plohu nakon čega slijedi razvijanje te plohe u ravninu projekcije?

To se ne može ni vidjeti ni zaključiti iz izvoda uspravne ekvivalentne cilindrične projekcije.

Je li uspravna ekvidistantna cilindrična projekcija s dvije standardne paralele sekantna projekcija? Ne, nije.





Dokaz.

Opće jednadžbe uspravne cilindrične projekcije su

$$y = k\lambda$$
$$x = x(\varphi).$$

Linearna mjerila uzduž meridijana i paralela su

$m = \dfrac{dx}{Rd\varphi}$ i $n = \dfrac{k}{R\cos\varphi}$, gdje je *R* polumjer sfere.

Pretpostavimo da je paralela kojoj odgovara širina φ_1 standardna paralela za neki $\varphi = \varphi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Kosinus je parna funkcija pa je $\cos\varphi_1 = \cos(-\varphi_1)$, što znači da je paralela sa širinom $-\varphi_1$ također standardna paralela.

Iz uvjeta $n(\varphi_1) = \dfrac{k}{R\cos\varphi_1} = 1$ imamo $k = R\cos\varphi_1$,

i jedna od jednadžbi projekcije je

$y = R\cos\varphi_1\lambda$.

Ako je projekcija ekvidistantna, tada iz uvjeta $m = 1$ slijedi

$$\frac{dx}{Rd\varphi} = 1$$

i

$$dx = Rd\varphi, \quad x = R\varphi + K.$$

Prirodni uvjet $x = 0$ za $\varphi = 0$ daje $K = 0$.

Konačne jednadžbe za uspravnu ekvidistantnu cilindričnu projekciju s dvije standardne paralele φ_1 i $-\varphi_1$ glase:

$$y = R\cos\varphi_1\lambda$$
$$x = R\varphi.$$

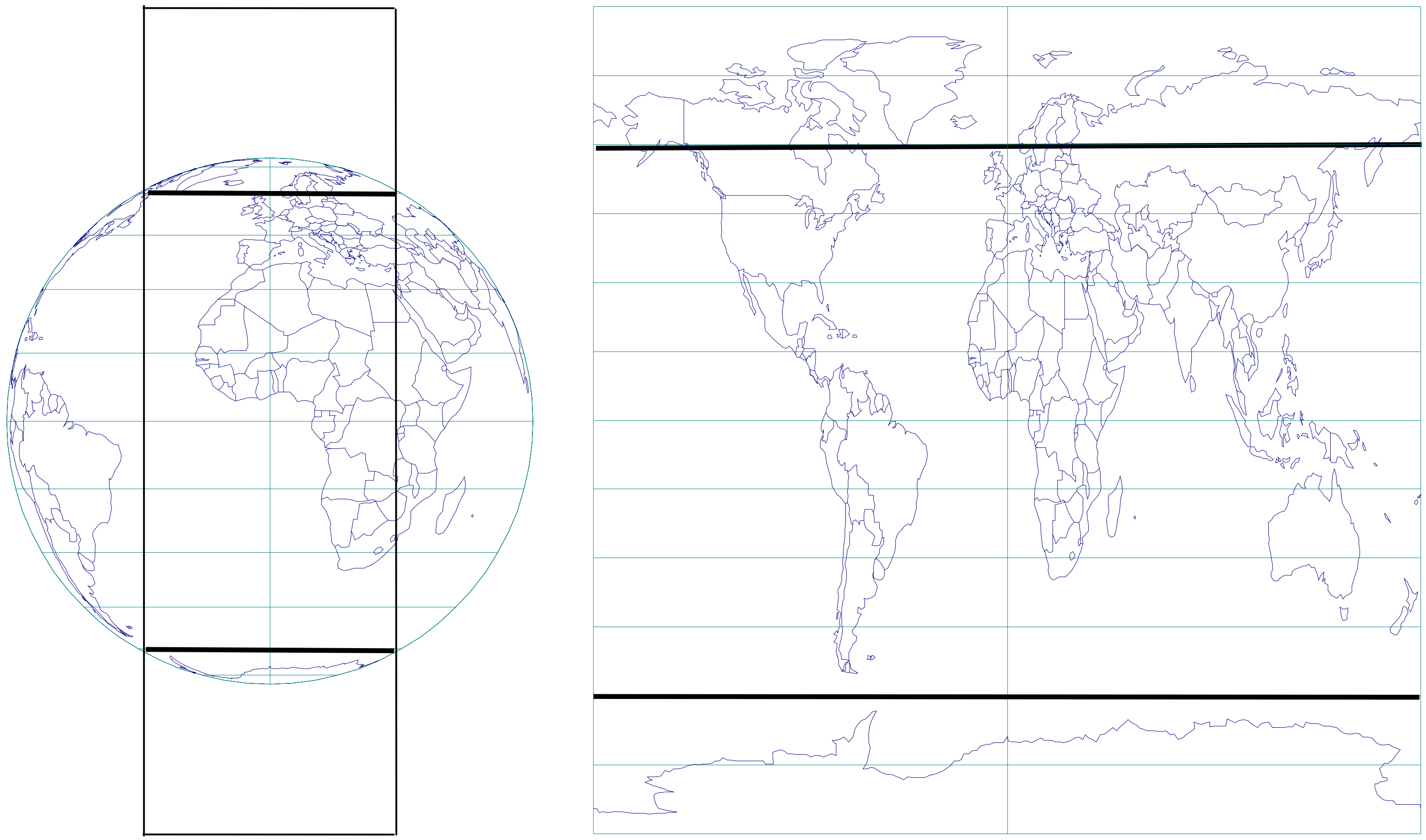
Dakle,

$$x(\varphi_1) = R\varphi_1,$$

što je jednako $R\sin\varphi_1$ ako i samo ako je $\varphi_1 = 0$.

Primjer.

Neka je standardna paralela zadana s $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}$. Na sferi ta je paralela na visini $R\sin\varphi_1 = R\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0,866R$ iznad ekvatorske ravnine, dok je u uspravnoj ekvidistantnoj projekciji $R\dfrac{\pi}{3} = 1,04R$ iznad slike ekvatora.



Lijeva i desna slika u istom su mjerilu. Deblje izvučene paralele na različitim su visinama iznad ekvatora.

Zaključak:

Dokazano je da se standardna paralela u uspravnoj ekvidistantnoj cilindričnoj projekciji ne može objasniti ili interpretirati kao paralela u kojoj sfera siječe cilindar.

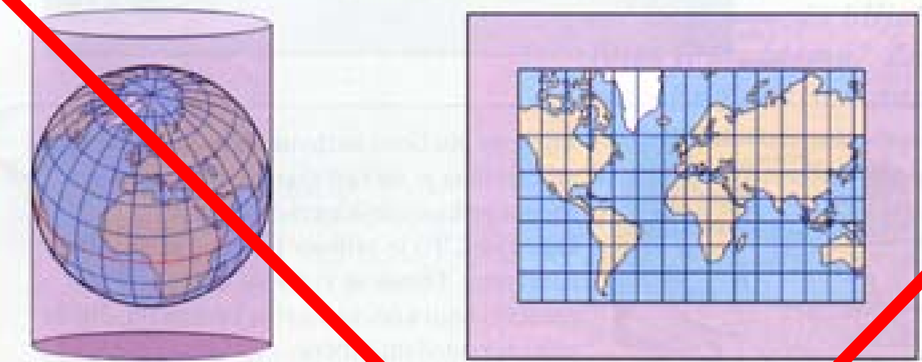
Objašnjavanje uspravne ekvidistantne cilindrične projekcije kao projekcije na cilindričnu plohu koja siječe sferu (sekantna projekcija) nema smisla jer takva projekcija ne postoji.

Je li potrebno opisivati uspravnu ekvidistantnu cilindričnu projekciju kao projekciju na cilindričnu plohu nakon čega slijedi razvijanje te plohe u ravninu projekcije?

To se ne može ni vidjeti ni zaključiti iz izvoda uspravne ekvidistantne cilindrične projekcije.

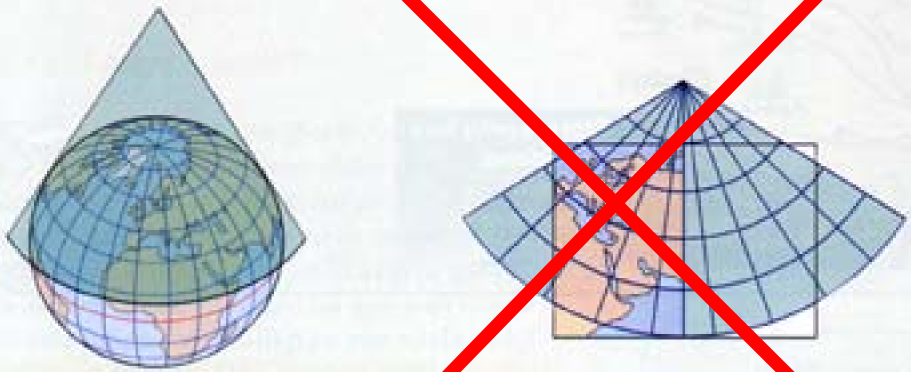
Za domaću zadaću:

Dokazati slične tvrdnje za konusne projekcije.



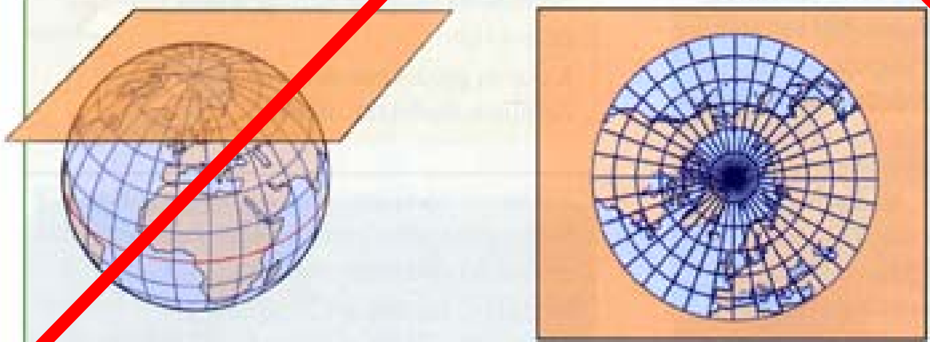
Valjkasta projekcija

Valjak dodiruje globus na ekvatoru. Tamo su površine najvjernije, a na polovima su najizobličenije.



Stožasta projekcija

Stožac dodiruje globus na jednoj paraleli. Tu su površine najtočnije prikazane. Dijelovi stošca koji su više odvojeni od globusa, više su i izobličeni.



Horizontalna projekcija

Ravna ploha dodiruje globus u jednoj točki. Što su površine udaljenije od te središnje točke, to su izobličenije.

Hvala na pozornosti!